UNIVERSITE DU BENIN
OFFICE DU BACCALAUREAT

BACCALAUREAT 2001 **Session Normale**
MATHEMATIQUES Coef. : 5
SERIES C & E Durée : 4 H

EXERCICE 1. (3,5 pts)

Un sac contient n boules ($n \geq 4$) indiscernables au toucher et numérotés de 1 à n.
On tire simultanément 4 boules de ce sac.

1 - Combien y-a-t-il de tirages possibles ? (0,5 pts)

2 - On considère la variable aléatoire X égale au plus grand numéro obtenu en effectuant le tirage ci-dessus.
   a- Déterminer la loi de probabilité de X. (1 pt)
   b- En déduire, en fonction de n, une expression de $\sum_{k=4}^{n} C_{k-1}^{3}$ à l'aide d'un unique coefficient binomial. (0,5 pt)

3 - Déterminer, n afin que la probabilité de l'événement $X = n-1$ soit égale à 0,2.(0,5 pt)

4 - Déterminer, à 0,1 près, l'espérance mathématique de X pour chacune des valeurs trouvées à la question précédente.(1 pt)

EXERCICE 2 (5,5 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ **(on tracera les courbes demandées sur un seul dessin en prenant 2 centimètres pour unité graphique).**
On considère la parabole (P) d'équation $y^2 = 4x$

1- a- Déterminer les coordonnées du foyer F et l'équation de la directrice (Δ) de la parabole (P). (0,5 pt)
   b- Tracer (Δ) ; (P) et placer F. (0,75 pt)
   Dans toute la suite de l'exercice M désigne un point de (P) autre que O.
   On désigne par t l'ordonnée du point M.

2 - Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite $(o,\vec{j})$. Les droites (FH) et (OM) se coupent en E.
   a- Après avoir déterminé, en fonction de t une équation cartésienne de chacune des droites (FH) et (OM), déterminer les coordonnées (x, y) du point E.(0,75 pt)
   b- Vérifier que les coordonnées (x,y) du point E sont telles que $y^2+(2x-1)^2 = 1$ (0,25 pt)
   c- En déduire que, quelque soit le réel t, le point E appartient à une conique fixe (Γ_1) dont on précisera la nature, le centre et les sommets. Tracer (Γ_1). (0,75 pt)

3 - Soit K le projeté orthogonal de F sur la directrice (Δ) de la parabole (P). on suppose que les droites (KH) et (OM) se coupent en L. En s'inspirant de la méthode utilisée dans la question 2-, prouver que L appartient à une hyperbole fixe (Γ_2) dont on précisera le centre, les sommets et les asymptotes. Tracer (Γ_2) (1,5 pts)

4 - Soit (D) la droite perpendiculaire à la droite (OM) et passant par H.
   a- Démontrer que, quelque soit le réel t, la droite (D) passe par un point fixe I dont on précisera les coordonnées. (0,25 pt)
   b- Soit J le point d'intersection des droites (D) et (OM). Démonter que, quel que soit le réel t, le point J appartient à un cercle dont on déterminera une équation cartésienne. Tracer ce cercle. (0,75 pt)

PROBLEME (11 pts)

Soit la fonction numérique f_a de la variable réelle x définie par $f_a(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}\right)$ où a est un nombre réel non nul.
On désigne par (C_a) la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

Partie A

1- Etudier la parité de f_a .(0,75 pt)

2- Démontrer que la courbe (C_a) possède deux asymptotes dont on donnera les équations.(0,5 pt)

3- Etudier, selon les valeurs du réel non nul a, le sens de variation de f_a .(0,5 pt)

4- a- Démontrer que f_a est une bijection de son ensemble de définition sur un ensemble que l'on précisera (0,5 pt)

b- Expliciter $f_a^{-1}(x)$. On désigne par (Γ_a) la courbe représentative de f_a^{-1} relativement au repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (0,25 pt)

5- a- Démontrer que l'affinité orthogonale d'axe $(o, \vec{j})$ et de rapport a transforme (C_1) en (C_a)(0,5 pt)

b- Soit a et a' deux réels non nuls et distincts. Déterminer une application affine transformant (C_a) en $(C_{a'})$. (0,5 pt)

6- Soit R la rotation de centre O et d'angle $(-\frac{\pi}{2})$, S la symétrie orthogonale d'axe $(o, \vec{i})$

a- Déterminer une expression analytique de RoS puis donner une équation cartésienne de la transformée, RoS (Γ_a), de (Γ_a) par RoS.(0,75 pt)

b- Comparer les équations cartésiennes de (C_a) et de RoS (Γ_a). Pouvait-on prévoir ce résultat ? Dans la suite du problème, on suppose a = 1.(0,5 pt)

7- Tracer la tangente à la courbe (C_1) au point d'abscisse O ainsi que (C_1) et (Γ_1).(1 pt)

Partie B

1- Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = f_1(\sin x)$.

Démontrer que $g'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ (0,5 pt)

2- Déterminer le réel c tel que $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} = \ln c$ (0,25 pt)

3- On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x}dx$ où n est un entier naturel non nul.

On définit ainsi une suite numérique (I_n)

a- Démontrer que la suite (I_n) est à termes positifs. (0,25)

b- Etudier le sens de variation de la suite (I_n).(0,5 pt)

c- Démontrer que $I_n \leq \dfrac{\ln c}{4^n}$. (1 pt)

d- En déduire la limite de la suite (I_n). (0,25 pt)

Partie C

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction h_n définie sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$

par $h_n(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(\sin x)^{2p-1}}{2p-1}$

1- Donner une expression simplifiée de la somme $S_n(x) = 1 + \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} (\sin x)^{2p}$ en

remarquant que $S_n(x)$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique (x est un réel). (1 pt)

2- Démontrer que $h'_n(x) = \dfrac{1-(\sin x)^{2n}}{\cos x}$ (0,5 pt)

3- Montrer que $h_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln\sqrt{3} - I_n$ (0,5 pt)

4- En déduire que la suite (Un) définie par $U_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p-1)2^{2p-1}}$ a une limite que l'on déterminera. (0,5 pt)