MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2009	DUREE : 4 H
	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C4	

Session Normale

Exercice 1 (3,5 points)

a et b sont deux entiers tels que $a > b > 0$; δ est leur PGCD et μ leur PPCM.

1. Déterminer δ et μ pour $a = n(2n-1)$ et $b = (n-1)(2n-1)$, n étant un entier supérieur à 1. (0,5 pt)

2. On pose $a' = \dfrac{a}{\delta}$ et $b' = \dfrac{b}{\delta}$.
Déterminer en fonction de a' et b' les nombres a et b tels que $\mu(a+b) = ab\,\delta$ (1) . (0,75 pt)

3. Parmi les nombres a et b qui satisfont à la relation (1), démontrer que ceux qui satisfont à $\delta = a - b$ (2) sont telles que $a = a'(2a'-1)$ et $b = (a'-1)(2a'-1)$. (0,5 pt)

4. Démontrer que les nombres entiers a et b qui vérifient les relations (1) et (2) sont tels que $(a-b)^2 = a+b$ (3). (0,5 pt)

5. Les nombres entiers a et b qui satisfont à la relation (3) satisfont-ils aux relations (1) et (2) ? (0,75 pt)

6. On suppose que a et b satisfont à la relation (3). Déterminer alors a et b pour $\delta = 11$. (0,5 pt)

Exercice 2 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t^3-1}$.

On note $g(x) = \dfrac{1}{x^3-1}$ et C la représentation graphique de f dans un repère orthonormée (unité graphique 6 cm).

1. a/ Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$. (0,5 pt)
   b/ Etudier le sens de variation de f. (0,5 pt)

2. a/ Montrer que, pour tout $x > 1$, $(x^2-x)g(x^2) \leq f(x) \leq (x^2-x)g(x)$. (0,75 pt)
   b/ En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. (0,5 pt)

3. a/ Trouver les nombres réels a, b et c tels que : $g(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$. (0,75 pt)
   b/ Montrer que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$ est croissante sur $[0;+\infty[$. (0,5 pt)
   c/ Démontrer que, pour tout $x > 1$, $(x^2-x)h(x) \leq \displaystyle\int_x^{x^2} h(t)dt \leq (x^2-x)h(x^2)$. (0,5 pt)
   d/ Puis en déduire la limite à droite en 1 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_x^{x^2} h(t)dt$. (0,5 pt)

4. Calculer la limite à droite en 1 de f. (0,5 pt)

5. Préciser le comportement de C au voisinage du point de coordonnées $(1 ; \frac{1}{3}\ln 2)$ puis tracer C. (1 pt)

Problème : (10,5 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$; l'unité graphique étant égale à 2 cm.
A tout point M de P de coordonnées $(x ; y)$, on associe son affixe $z = x + iy$.

I- Soient a et b deux nombres réels, on désigne par $f_{a,b}$ l'application de P dans P qui au point M de coordonnées (x ; y) fait correspondre le point M' dont les coordonnées (x' ; y') sont définies par :

$$x' = ax \quad \text{et} \quad y' = -ay+b.$$

1. a/ Déterminer suivant les valeurs de a et b l'ensemble des points invariants par $f_{a,b}$. (0,75 pt)

   b/ Si $|a| = 1$, reconnaître $f_{a,b}$ et donner ses éléments caractéristiques. (0,75 pt)

2. On suppose a non nul et $|a| \neq 1$.

   a/ Démontrer que $f_{a,b}$ est la composée de la symétrie orthogonale d'axe (D) d'équation $y = \dfrac{b}{1+a}$ par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport. (0,75 pt)

   b/ Soit M_1 le point de coordonnées (a ; b) ; on pose pour tout n de IN^*, $M_{n+1} = f_{a,b}(M_n)$.

   b$_1$/ Etablir que M_n a pour coordonnées $\left(a^n ; b\dfrac{1-(-a)^n}{1+a}\right)$ $\forall n \in IN^*$. (0,75 pt)

   b$_2$/ Montrer que les points M_n appartiennent à la réunion de deux droites dont l'une (D_1) passe par le point A de coordonnées $\left(0; \dfrac{b}{1+a}\right)$ et le point M_1, alors que l'autre, (D_2) est la transformée de (D_1) par $f_{a,b}$. (0, 5 pt)

II- Soient α et β deux nombres réels. On considère l'application $g_{\alpha,\beta}$ de P dans P qui au point N d'affixe z fait correspondre le point N' dont l'affixe z' est définie par : $z' = \alpha z + i\beta$.

1. Déterminer, suivant les valeurs de α et β la nature et les éléments caractéristiques de $g_{\alpha,\beta}$. (0, 5 pt)

2. On considère α non nul et différent de 1 et le point N_1 d'affixe $z_1 = \alpha + i\beta$. On pose pour tout entier n strictement positif, $N_{n+1} = g_{\alpha,\beta}(N_n)$.

   a/ Montrer que N_n a pour affixe $z_n = \alpha^n + i\beta\dfrac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$. (0,75 pt)

   b/ Montrer que les points N_n appartiennent à une même droite (Δ) passant par le point N_1 et le point B de coordonnées $\left(0 ; \dfrac{\beta}{1-\alpha}\right)$. (0, 5 pt)

3. On considère les cas $\alpha = -a$ et $\beta = b$ avec a non nul et $|a| \neq 1$. Montrer que (Δ) = (D_2). (0,75 pt)

III- Dans cette partie, on suppose $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. Soit φ_1 la fonction numérique définie par :

$$\varphi_1(x) = xe^{\frac{1}{x}} - 2.$$

1. Etudier les variations de φ_1 et construire sa courbe représentative (C_1) dans le plan P. (2,5 pts)

2. Pour tout n entier naturel strictement positif, on note φ_{n+1} la fonction numérique dont la courbe représentative (C_{n+1}) est l'image de la courbe (C_n) par $g_{2,1}$, (C_n) est la représentation graphique de la fonction φ_n.

   Montrer que pour tout entier n de IN^*, $\varphi_n(x) = xe^{\frac{2^{n-1}}{x}} - 2^{n-1} - 1$. (0,75 pt)

3. a/ Montrer que pour tout n de IN^*, les courbes (C_n) ont les mêmes asymptotes. (0, 5 pt)

   b/ Soit E_n le point de (C_n) en lequel la tangente a la direction définie par $\vec{i}$; montrer que l'ensemble de ces points, lorsque n décrit IN^* est inclus dans une droite passant par B de coordonnées (0 ; –1). (0,75 pt)